高考圆锥曲线学习报告

Jayun

DONGGUAN MIDDLE SCHOOL - SSL SCHOOL

2025 年 4 月

目录

韦达定理到硬解定理

设线后联立曲线，质朴有效。

韦达定理到硬解定理

设线后联立曲线，质朴有效。

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \Longrightarrow (b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2(m^2 - b^2) = 0$$

韦达定理到硬解定理

设线后联立曲线，质朴有效。

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \Longrightarrow (b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2(m^2 - b^2) = 0$$

$$\Delta = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - m^2)$$

设线后联立曲线，质朴有效。

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}\Longrightarrow (b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$$

$$\Delta=4a^2b^2(a^2k^2+b^2-m^2)\Rightarrow\Delta^*=a^2k^2+b^2-m^2$$

$$\begin{cases} x_1+x_2 & = & \frac{-2a^2km}{b^2+a^2k^2}\\ x_1x_2 & = & \frac{a^2(m^2-b^2)}{b^2+a^2k^2}\\ y_1+y_2 & = & \frac{2mb^2k}{b^2+a^2k^2}\\ y_1y_2 & = & \frac{b^2(m^2-a^2k^2)}{b^2+a^2k^2}\\ x_1y_2+x_2y_1 & = & \frac{-2a^2k^2b^2}{b^2+a^2k^2}\end{cases}$$

韦达定理到硬解定理

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ Ax+By+C=0 \end{cases} \Longrightarrow (a^2A^2+b^2B^2)x^2+2a^2ACx+a^2(c^2-b^2B^2)=0$$

$$\Delta=4a^2b^2B^2(a^2A^2+b^2B^2-C^2)\Rightarrow\Delta^*=a^2A^2+b^2B^2-C^2$$

$$\begin{cases} x_1+x_2 & = & \frac{-2a^2AC}{a^2A^2+b^2B^2} \\ x_1x_2 & = & \frac{a^2(C^2-b^2B^2)}{a^2A^2+b^2B^2} \\ y_1+y_2 & = & \frac{-2Bb^2C}{a^2A^2+b^2B^2} \\ y_1y_2 & = & \frac{b^2(C^2-a^2A^2)}{a^2A^2+b^2B^2} \\ x_1y_2+x_2y_1 & = & \frac{2a^2b^2AB}{a^2A^2+b^2B^2} \end{cases}$$

齐次化联立

例

(2023 全国乙卷）已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, A(-2,0)$ ，过 $T(-2,3)$ 的直线交椭圆于 P,Q ，连接 AP,AQ 分别交 y 轴于 M,N 。求证：线段 MN 的中点为定点。

变换主元

方法来自知乎大神 thforest。

变换主元

方法来自知乎大神 thforest。

例

$C:\frac{x^2}{4}+y^2+1, l\cap C=\{M,N\}, OM\perp ON$，证明 O 到 l 距离为定值。

例

（广东一模）F_1, F_2 分别为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，两点在双曲线上且关于原点对称（点 A 在第一象限），直线 CF_2 与双曲线的另一个交点为点 B，若 $|AF_1|-|BF_2|=6$，求 $S_{\triangle ABC}$.

点差法和定比点差法

点差法和定比点差法

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{BM} \Rightarrow M\left(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}\right)$$

轴点差和非轴点差法

之前主播在恩师土豆面前实战打出了连贯合分比公式，那就是轴点差。

轴点差和非轴点差法

之前主播在恩师土豆面前实战打出了连贯合分比公式，那就是轴点差。轴点差是一个用来优化一类非对称韦达定理问题的方法。

轴点差和非轴点差法

之前主播在恩师土豆面前实战打出了连贯合分比公式，那就是轴点差。轴点差是一个用来优化一类非对称韦达定理问题的方法。

合比性质

$\forall a, b, c, d$，若存在 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 且 $\frac{pa+qc}{pb+qd}$ 有意义，则 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{pa+qc}{pb+qd}$.

轴点差和非轴点差法

之前主播在恩师土豆面前实战打出了连贯合分比公式，那就是轴点差。轴点差是一个用来优化一类非对称韦达定理问题的方法。

合比性质

$\forall a,b,c,d$，若存在 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 且 $\frac{pa+qc}{pb+qd}$ 有意义，则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{pa+qc}{pb+qd}$.

对于在非退化的二次曲线 C（不妨设 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b_2}=1$）上两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 过一个在 C **的轴上**的定点 M（不妨设 $M(x_0,0)$），则存在一个在相同轴上的定点 N 使得 $k_{AN}+k_{BN}=0$.

轴点差和非轴点差法

之前主播在恩师土豆面前实战打出了连贯合分比公式，那就是轴点差。轴点差是一个用来优化一类非对称韦达定理问题的方法。

合比性质

$\forall a, b, c, d$，若存在 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 且 $\frac{pa+qc}{pb+qd}$ 有意义，则 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{pa+qc}{pb+qd}$.

对于在非退化的二次曲线 C（不妨设 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_2} = 1$）上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ **过一个在 C 的轴上的定点** M（不妨设 $M(x_0, 0)$），则存在一个在相同轴上的定点 N 使得 $k_{AN} + k_{BN} = 0$.
首先由 A, B, M 在同一直线得

$$\frac{y_1}{x_1 - x_0} = \frac{y_2}{x_2 - x_0}$$

轴点差和非轴点差法

之前主播在恩师土豆面前实战打出了连贯合分比公式，那就是轴点差。
轴点差是一个用来优化一类非对称韦达定理问题的方法。

合比性质

$\forall a,b,c,d$，若存在 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 且 $\frac{pa+qc}{pb+qd}$ 有意义，则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{pa+qc}{pb+qd}$.

对于在非退化的二次曲线 C（不妨设 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b_2}=1$）上两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 过一个在 C **的轴上**的定点 M（不妨设 $M(x_0,0)$），则存在一个在相同轴上的定点 N 使得 $k_{AN}+k_{BN}=0$.
首先由 A,B,M 在同一直线得

$$\frac{y_1}{x_1-x_0}=\frac{y_2}{x_2-x_0}\Rightarrow\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$$

轴点差和非轴点差法

之前主播在恩师土豆面前实战打出了连贯合分比公式，那就是轴点差。轴点差是一个用来优化一类非对称韦达定理问题的方法。

合比性质

$\forall a,b,c,d$，若存在 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 且 $\frac{pa+qc}{pb+qd}$ 有意义，则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{pa+qc}{pb+qd}$.

对于在非退化的二次曲线 C（不妨设 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b_2}=1$）上两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ **过一个在 C 的轴上的定点** M（不妨设 $M(x_0,0)$），则存在一个在相同轴上的定点 N 使得 $k_{AN}+k_{BN}=0$.
首先由 A,B,M 在同一直线得

$$\frac{y_1}{x_1-x_0}=\frac{y_2}{x_2-x_0}\Rightarrow\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$$

平方得

$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{(x_1-x_0)^2}{(x_2-x_0)^2}=\frac{x_1^2-2x_0x_1+x_0^2}{y_1^2-2y_0y_1+y_0^2}$$

轴点差和非轴点差法

由 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$，

$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{x_1^2-2x_0x_1+x_0^2}{y_1^2-2y_0y_1+y_0^2}=\frac{x_1^2-a^2}{x_2^2-a^2}$$

轴点差和非轴点差法

由 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$，

$$
\begin{aligned}
\frac{y_1^2}{y_2^2}&=\frac{x_1^2-2x_0x_1+x_0^2}{y_1^2-2y_0y_1+y_0^2}=\frac{x_1^2-a^2}{x_2^2-a^2}\\
&=\frac{\frac{a^2}{x_0^2}(x_1^2-2x_0x_1+x_0^2)+\left(1-\frac{a^2}{x_0^2}\right)(x_1^2-a^2)}{\frac{a^2}{x_0^2}(x_2^2-2x_0x_2+x_0^2)+\left(1-\frac{a^2}{x_0^2}\right)(x_2^2-a^2)}\\
&=\frac{(x_1-\frac{a^2}{x_0})^2}{(x_2-\frac{a^2}{x_0})^2}
\end{aligned}
$$

由 $\frac{y_1}{y_2},\frac{x_1-\frac{a^2}{x_0}}{x_2-\frac{a^2}{x_0}}$ 异号知 $\frac{y_1}{y_2}=-\frac{x_1-\frac{a^2}{x_0}}{x_2-\frac{a^2}{x_0}}$

轴点差和非轴点差法

由 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$，

$$\begin{aligned}
\frac{y_1^2}{y_2^2} &= \frac{x_1^2 - 2x_0x_1 + x_0^2}{y_1^2 - 2y_0y_1 + y_0^2} = \frac{x_1^2 - a^2}{x_2^2 - a^2} \\
&= \frac{\frac{a^2}{x_0^2}(x_1^2 - 2x_0x_1 + x_0^2) + \left(1 - \frac{a^2}{x_0^2}\right)(x_1^2 - a^2)}{\frac{a^2}{x_0^2}(x_2^2 - 2x_0x_2 + x_0^2) + \left(1 - \frac{a^2}{x_0^2}\right)(x_2^2 - a^2)} \\
&= \frac{(x_1 - \frac{a^2}{x_0})^2}{(x_2 - \frac{a^2}{x_0})^2}
\end{aligned}$$

由 $\frac{y_1}{y_2}, \frac{x_1 - \frac{a^2}{x_0}}{x_2 - \frac{a^2}{x_0}}$ 异号知 $\frac{y_1}{y_2} = -\frac{x_1 - \frac{a^2}{x_0}}{x_2 - \frac{a^2}{x_0}}$

轴点差的应用就是根据形如这样的不线性对应的公式，利用合分比凑配出想要的形式。事实上，还可以

例

(广州十二调) 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 已知 $M(-1,0), N(1,0)$, 点 P 为椭圆 C 上一点, 设直线 PM 与椭圆 C 的另一个交点为点 B, 直线 PN 与椭圆 C 的另一个交点为点 D, 设 $\overrightarrow{PM} = \lambda_1 \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{PN} = \lambda_2 \overrightarrow{ND}$, 求证: 当点 P 在椭圆 C 上运动时, $\lambda_1 + \lambda_2$ 为定值.

例

（深圳一模）抛物线 $y^2=2x$，过点 $N(2,0)$ 作两条直线 l_1,l_2 分别交抛物线于 A,B 和 C,D （A,C 在 x 轴上方）。当 l_1,l_2 倾斜角互补时，$AC\cap BD=M$ 求 $\triangle MAB$ 的内切圆的圆心横坐标范围。

轴点差和非轴点差法

主播主播，你的轴点差确实很强，但还是太吃定点在轴上的性质了，有没有不吃这性质的方法推荐一下吗

轴点差和非轴点差法

主播主播，你的轴点差确实很强，但还是太吃定点在轴上的性质了，有没有不吃这性质的方法推荐一下吗

有的兄弟有的，这么强的方法还有九个~~（并非九个~~

轴点差和非轴点差法

主播主播，你的轴点差确实很强，但还是太吃定点在轴上的性质了，有没有不吃这性质的方法推荐一下吗

有的兄弟有的，这么强的方法还有九个~~（并非九个~~

$$\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$$

轴点差和非轴点差法

主播主播，你的轴点差确实很强，但还是太吃定点在轴上的性质了，有没有不吃这性质的方法推荐一下吗

有的兄弟有的，这么强的方法还有九个~~（并非九个~~

$$\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{-x_0(y_1 - y_0) + y_0(x_1 - x_0)}{-x_0(y_2 - y_0) + y_0(x_2 - x_0)}$$

轴点差和非轴点差法

主播主播，你的轴点差确实很强，但还是太吃定点在轴上的性质了，有没有不吃这性质的方法推荐一下吗

有的兄弟有的，这么强的方法还有九个~~（并非九个~~

$$\frac{y_1-y_0}{y_2-y_0}=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}=\frac{-x_0(y_1-y_0)+y_0(x_1-x_0)}{-x_0(y_2-y_0)+y_0(x_2-x_0)}=\frac{y_0x_1-x_0y_1}{y_0x_2-x_0y_2}$$

轴点差和非轴点差法

主播主播，你的轴点差确实很强，但还是太吃定点在轴上的性质了，有没有不吃这性质的方法推荐一下吗
有的兄弟有的，这么强的方法还有九个~~（并非九个~~

$$\frac{y_1-y_0}{y_2-y_0}=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}=\frac{-x_0(y_1-y_0)+y_0(x_1-x_0)}{-x_0(y_2-y_0)+y_0(x_2-x_0)}=\frac{y_0x_1-x_0y_1}{y_0x_2-x_0y_2}$$

$$\left(\frac{y_1-y_0}{y_2-y_0}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}\right)^2=\left(\frac{y_0x_1-x_0y_1}{y_0x_2-x_0y_2}\right)^2$$

轴点差和非轴点差法

主播主播，你的轴点差确实很强，但还是太吃定点在轴上的性质了，有没有不吃这性质的方法推荐一下吗

有的兄弟有的，这么强的方法还有九个~~（并非九个~~

$$\frac{y_1-y_0}{y_2-y_0}=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}=\frac{-x_0(y_1-y_0)+y_0(x_1-x_0)}{-x_0(y_2-y_0)+y_0(x_2-x_0)}=\frac{y_0x_1-x_0y_1}{y_0x_2-x_0y_2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{y_1-y_0}{y_2-y_0}\right)^2&=\left(\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}\right)^2=\left(\frac{y_0x_1-x_0y_1}{y_0x_2-x_0y_2}\right)^2\\
&=\frac{\frac{(x_1-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y_1-y_0)^2}{b^2}-\frac{(y_0x_1-x_0y_1)^2}{a^2b^2}}{\frac{(x_2-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y_2-y_0)^2}{b^2}-\frac{(y_0x_2-x_0y_2)^2}{a^2b^2}}\\
&=\left(\frac{\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}-1}{\frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0y_2}{b^2}-1}\right)^2\end{aligned}$$

轴点差和非轴点差法

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} y^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2 \\ x^2=\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)a^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(y_0x-x_0y)^2}{a^2b^2} \\
&=1+\frac{x_0^2-2x_0x}{a^2}+\frac{y_0^2-2y_0y}{b^2}-\frac{y_0^2x^2}{a^2b^2}-\frac{x_0^2y^2}{a^2b^2}+\frac{2x_0y_0xy}{a^2b^2} \\
&=1+\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y_0^2}{b^2}+\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{x_0^2}{a^2}-2\frac{x_0x}{a^2}-2\frac{y_0y}{b^2}+2\frac{x_0x}{a^2}\frac{y_0y}{b^2} \\
&=\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1\right)^2
\end{aligned}$$

二次代换

二次代换

“二次代换”这个名字由知乎大神 Claris 给出。二次代换和轴点差、非轴点差法本质相同，但它不含分式，且多项式明显，应对一些题目可以更有效地凑出目标。

二次代换

“二次代换”这个名字由知乎大神 Claris 给出。二次代换和轴点差、非轴点差法本质相同，但它不含分式，且多项式明显，应对一些题目可以更有效地凑出目标。

二次代换

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \Rightarrow \begin{cases} x_1(y_2 - y_0) - x_2(y_1 - y_0) = x_0(y_2 - y_1) \\ y_1(x_2 - x_0) - y_2(x_1 - x_0) = y_0(x_2 - x_1) \end{cases}$$

二次代换

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}\Rightarrow\begin{cases}x_1(y_2-y_0)-x_2(y_1-y_0)=x_0(y_2-y_1)\\y_1(x_2-x_0)-y_2(x_1-x_0)=y_0(x_2-x_1)\end{cases}$$

$$x_1(y_2-y_0)+x_2(y_1-y_0)=\frac{x_1^2(y_2-y_0)^2-x_2^2(y_1-y_0)}{x_1(y_2-y_0)-x_2(y_1-y_0)}$$

二次代换

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}\Rightarrow\begin{cases}x_1(y_2-y_0)-x_2(y_1-y_0)=x_0(y_2-y_1)\\ y_1(x_2-x_0)-y_2(x_1-x_0)=y_0(x_2-x_1)\end{cases}$$

$$x_1(y_2-y_0)+x_2(y_1-y_0)=\frac{x_1^2(y_2-y_0)^2-x_2^2(y_1-y_0)}{x_1(y_2-y_0)-x_2(y_1-y_0)}$$

由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2$

$$=\frac{(a^2-\frac{a^2}{b^2}y_1^2)(y_2-y_0)^2-(a^2-\frac{a^2}{b^2}y_2^2)(y_1-y_0)^2}{x_0(y_2-y_1)}$$

$$=\frac{a^2+\frac{a^2}{b^2}y_0^2}{x_0}(y_1+y_2)-\frac{2a^2y_0}{b^2x_0}y_1y_2-\frac{2a^2y_0}{x_0}$$

$$\Rightarrow x_1y_2+x_2y_1=y_0(x_1+x_2)+\frac{a^2+\frac{a^2}{b^2}y_0^2}{x_0}(y_1+y_2)-\frac{2a^2y_0}{b^2x_0}y_1y_2-2a^2\frac{y_0}{x_0}$$

二次代换

$$x_1y_2+x_2y_1=y_0(x_1+x_2)+\frac{a^2+\frac{a^2}{b^2}y_0^2}{x_0}(y_1+y_2)-\frac{2a^2y_0}{b^2x_0}y_1y_2-2a^2\frac{y_0}{x_0}$$

$$x_1y_2+x_2y_1=x_0(y_1+y_2)+\frac{b^2+\frac{b^2}{a^2}x_0^2}{y_0}(x_1+x_2)-\frac{2b^2x_0}{a^2y_0}x_1x_2-2b^2\frac{x_0}{y_0}$$

二次代换

$$x_1y_2+x_2y_1=y_0(x_1+x_2)+\frac{a^2+\frac{a^2}{b^2}y_0^2}{x_0}(y_1+y_2)-\frac{2a^2y_0}{b^2x_0}y_1y_2-2a^2\frac{y_0}{x_0}$$

$$x_1y_2+x_2y_1=x_0(y_1+y_2)+\frac{b^2+\frac{b^2}{a^2}x_0^2}{y_0}(x_1+x_2)-\frac{2b^2x_0}{a^2y_0}x_1x_2-2b^2\frac{x_0}{y_0}$$

取 y 一次 y 反 x，二次 $2ay$ 比偶。
常数 $2ay$ 比 x，非一取负系数方。

二次代换

例

(2024 华附五月测）椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上有三点 G,S,T ，直线 ST 过点 $C(2,2)$ ，点 M 为 GS 中点且在直线 $y=x$ 上，证明：直线 GT 与直线 $y=x$ 的交点为定点.

例

(广州十二调) 椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，已知 $M(-1,0),N(1,0)$，点 P 为椭圆 C 上一点，设直线 PM 与椭圆 C 的另一个交点为点 B，直线 PN 与椭圆 C 的另一个交点为点 D，设 $\overrightarrow{PM}=\lambda_1\overrightarrow{MB},\overrightarrow{PN}=\lambda_2\overrightarrow{ND}$，求证：当点 P 在椭圆 C 上运动时，$\lambda_1+\lambda_2$ 为定值.

点乘双根法

联立后的式子可化为 $\alpha(x-x_1)(x-x_2)=0$ 或 $\beta(y-y_1)(y-y_2)=0$，以此通过赋值 x, y 得到一些性质，尤其在斜率积有大用。

极坐标

极坐标

当极点在焦点上时与第二定义息息相关。

极坐标

当极点在焦点上时与第二定义息息相关。
可以推出很多性质：焦点弦长、调和平均定值（半通径）……

极坐标

当极点在焦点上时与第二定义息息相关。
可以推出很多性质：焦点弦长、调和平均定值（半通径）⋯⋯
当极点在中心上时，θ 表示倾斜角，是有意义的。

参数方程

参数方程

直线可表示为

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\theta \\ y = y_0 + t\sin\theta \end{cases}$$

椭圆

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

例

(2021 全国 I 卷) $C: x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$，$T$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 上，过 T 作两条直线分别交 C 于 A, B 和 P, Q，$|TA||TB| = |TP||TQ|$，求 $k_{AB} + k_{PQ}$。

曲线系方程

曲线系方程

和射影几何是一个量级的，基本上这两个能干的另一个都能干，不能干的另一个也不能干。射影重几何，曲线系重代数。

仿射变换

把椭圆、双曲线仿射成圆，具有圆的性质。

仿射变换

把椭圆、双曲线仿射成圆，具有圆的性质。

定义

共线三点 P_1, P_2, P_3 的**单比**表示为 (P_1P_2P)，定义

$$(P_1P_2P) = \frac{P_1P}{P_2P}$$

称 P_1, P_2 为基点，P 为分点.

仿射变换

把椭圆、双曲线仿射成圆，具有圆的性质。

定义

共线三点 P_1, P_2, P_3 的**单比**表示为 (P_1P_2P)，定义

$$(P_1P_2P) = \frac{P_1P}{P_2P}$$

称 P_1, P_2 为基点，P 为分点.

1. 保持同素性（经过仿射变换，点仍是点，线仍是线）和结合性（经过仿射变换，线上的点仍在线上）.
2. 保持共线三点单比不变.
3. 保持直线的平行性.

射影变换

定义

共线四点 P_1, P_2, P_3, P_4 的交比表示为 (P_1P_2, P_3P_4)，定义

$$(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)} = \frac{P_1P_3 \cdot P_2P_4}{P_2P_3 \cdot P_1P_4}$$

称 P_1, P_2 为基点偶，P_3, P_4 为分点偶.

二次曲线的射影理论

Pascal 定理

例

(2023 北京卷）椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上左下右四个顶点分别为 A,B,C,D ，设 P 是椭圆上一点，直线 $l: y=-2$ ， $PD\cap BC=M, PA\cap l=N$ 。求证：$MN//CD$ 。

例

（武汉二调）双曲线 $E: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$，$T$ 在 l 上，过 T 可作 E 的两条切线，设切点分别为 P, M。设直线 TP, TM 分别与 $x = -1$ 交与 Q, N，证明 PN, MQ 的交点在一条定直线。

Thank you all!

预祝我们高考大捷!